INPEC
Instituto Nacional Penitenciario y Carcelario

Ciclo Lectivo Especial Integrado
CLEI 6

¿Cómo conducirse en un mundo cambiante?

Unidad Integrada **4. El uso de las matemáticas como práctica liberadora**

La justicia es de todos
Minjusticia

Modelo Educativo para el Sistema Penitenciario y Carcelario Colombiano (MESPCC)

INPEC
Instituto Nacional Penitenciario y Carcelario

Ciclo Lectivo Especial Integrado
CLEI 6

¿Cómo conducirse en un mundo cambiante?

Unidad Integrada 4. El uso de las matemáticas como práctica liberadora

La justicia es de todos
Minjusticia

INPEC
Instituto Nacional Penitenciario y Carcelario

INSTITUTO NACIONAL PENITENCIARIO Y CARCELARIO INPEC
Dirección de Atención y Tratamiento
Subdirección de Educación

Bg. Norberto Mujica Jaime
Director General INPEC

Roselín Martínez Rosales
Directora de Atención y Tratamiento

Bonilyn Páez de la Cruz
Subdirectora de Educación

Enrique Alberto Castillo Fonseca
Coordinador Grupo de Educación Penitenciaria y Carcelaria

Servidores Públicos del Grupo Educación Penitenciaria y Carcelaria
Omaira Moreno Cortés
Gloria Neusa Rojas
Myriam Bejarano Velásquez
Meraly Chtriss Tapia Zambrano
María Elsa Páez García
Víctor Hugo Romero Velandia
Gustavo Jaimes Sepúlveda
Mario Alejandro Gallego

Autores Universidad Pedagógica Nacional
Dísney Barragán Cordero
Érika Viviana Pineda Jiménez
Ana María Guzmán
Mónica Ruiz
Ángela Lozano
Iván Torres Aranguren
Joaquín Darío Huertas
Eduardo Barrabes Vera
César Augusto Redondo
Nelson Sánchez

Contenido

Nota para el lector

Unidades Didácticas Integradas

El CLEI 6 está constituido por siete (7) Unidades Didácticas Integradas, a saber:


Unidad 1. Deporte


Unidad 2. Ética y filosofía


Unidad 3. Lenguaje


Unidad 4. Matemáticas


Unidad 5. Química


Unidad 6. Ciencias sociales


Unidad 7. Física

Desarrollo de la Unidad Didáctica 4. El uso de las matemáticas como práctica liberadora

Unidad Didáctica Integrada	Ejes y preguntas orientadoras	Contenidos y competencias del área	Competencias generales de la unidad
El uso de las matemáticas como práctica liberadora	**Ejes** ¿Existe belleza en las matemáticas? ¿Dónde? ¿Cómo podemos encontrarla? ¿Qué ejemplos interesantes de relación podríamos encontrar entre conceptos físicos y elementos de las matemáticas?	La variación numérica instantánea y su uso en situaciones de la vida real. La aproximación numérica y el concepto de límite para cálculos de situaciones reales. Situaciones que deben explicarse mediante probabilidades.	Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. Justifica resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición. Interpreta conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos. Propone inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

Introducción

En esta unidad vamos a continuar con los objetivos marcados en la anterior. Seguiremos con las situaciones que se pueden interpretar mediante el uso de los números y llegaremos a la interpretación de derivada como variación instantánea. Se hace necesario el estudio de las variaciones medias de forma constante en la vida real: cuál es el tiempo medio que usamos para llegar a un punto a donde nos desplazamos todos los días; qué velocidad media llevamos en un vehículo durante ese trayecto; qué temperatura media tiene una determinada zona de Colombia en un mes concreto (pensando en la ropa necesaria para ir allá); cuál es la precipitación media de una localidad durante el año (para determinar cuánta agua se podrá recoger en ese lugar); etc. Asimismo, el estudio de la variación instantánea también se hace necesario y, muchas veces, absolutamente trascendental para tomar decisiones: la temperatura instantánea se debe conocer para ver si un niño puede quemarse al ponerlo en el baño; la velocidad instantánea, para saber si estamos cometiendo una infracción de tráfico; la precipitación instantánea para saber cómo deben funcionar los sistemas de desagüe para recoger el agua que ha caído en un momento en una zona. De aquí se desarrolla el concepto de derivada y se puede comprobar su utilidad en la vida cotidiana. Para abordar esta idea de derivada se deberán usar la aproximación y los límites en situaciones de medición.

En esta unidad se avanzará un poco más en el concepto de probabilidad como continuación del desarrollo de la estadística descriptiva vista en la unidad anterior, con el fin de realizar una breve introducción de la inferencia estadística para la toma de decisiones.

Momento metodológico 1

¿Qué sabemos?

(What do we know?)

El número áureo permite hablar del concepto de belleza usando las matemáticas. Para hacer una aproximación al número áureo veremos y construiremos la serie de Fibonacci y así también podremos introducir el concepto de límite de una forma sencilla.

Mediante el proceso de construcción del número áureo veremos cómo conceptos, en principio muy formales dentro del área de las matemáticas, toman un lugar fundamental en la cotidianidad.

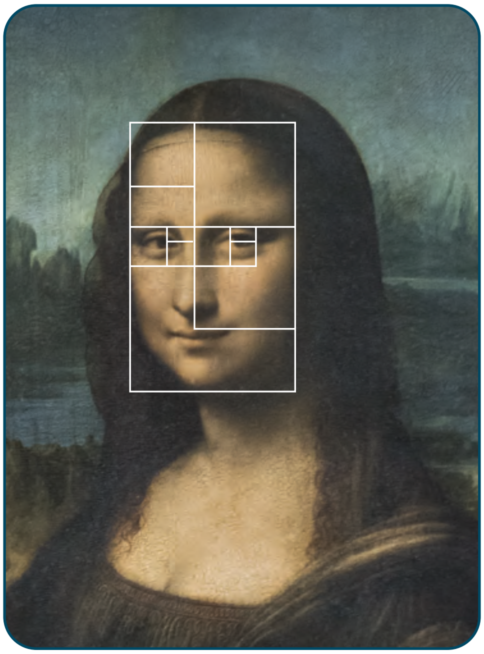
Sesión 1

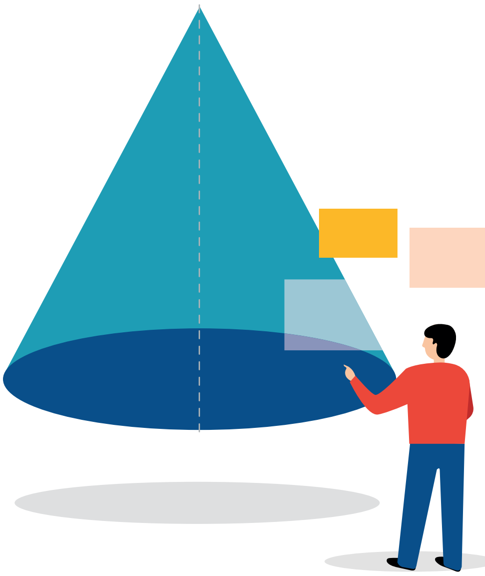
La belleza en la vida real explicada con matemáticas

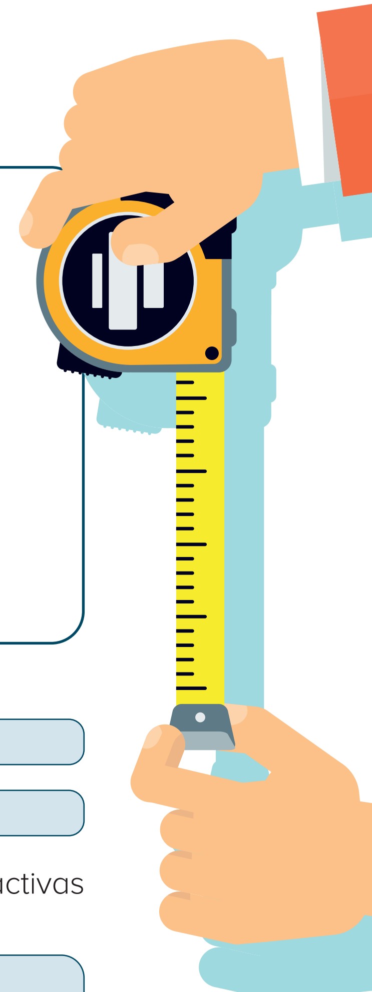
(The beauty of reality explained with mathematics)

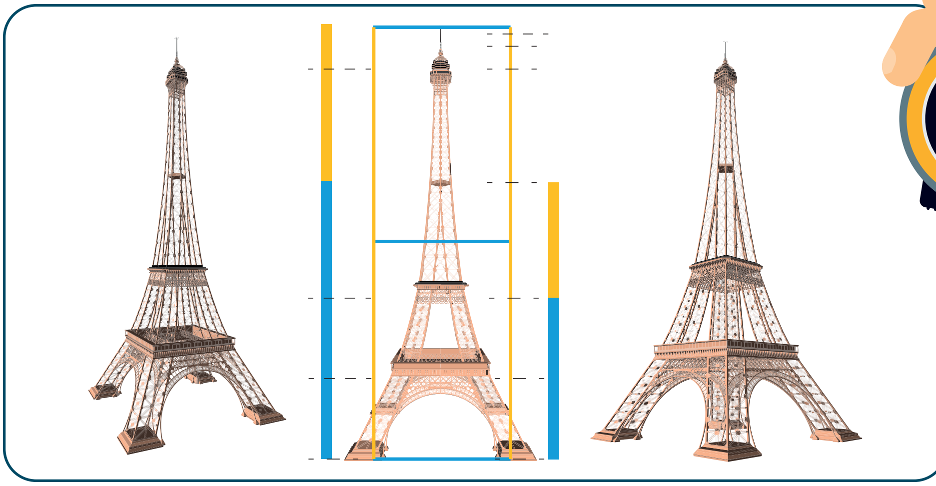
Actividad

Observe las siguientes imágenes:



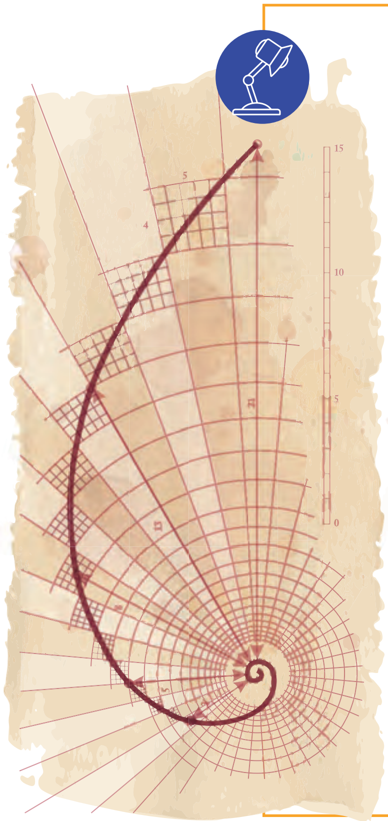






Fuente: López (2017)

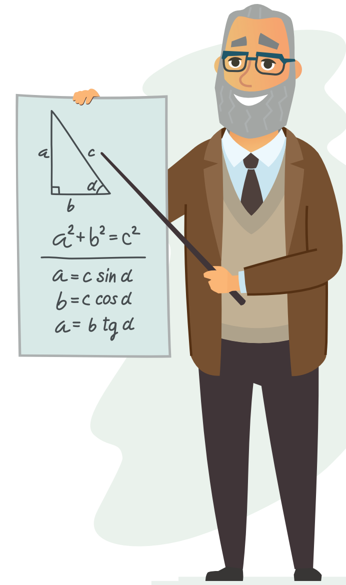
- ¿Le parecen bellas?:
- ¿Sí o no?. ¿Por qué?
- ¿Qué cree que tienen estas imágenes que las hacen atractivas de forma general?:



La construcción de la torre Eiffel, la pintura de La Gioconda (también llamada Mona Lisa), las espirales del caracol de mar o de la galaxia tienen algo en común. Todas estas imágenes contienen la presencia del llamado número áureo, escrito con la letra griega φ (phi, en minúscula) o ϕ (Phi, en mayúscula) en honor al escultor griego Fidias.

Fue descubierto en la antigüedad no como una expresión aritmética (es decir como la solución de una fórmula, por ejemplo $\frac{9}{3}+\sqrt[3]{8}-4^2$), sino como relación o proporción entre dos segmentos de una recta, es decir, una construcción geométrica. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza: en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol, etc.

Asimismo, se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea. Algunos incluso creen que posee una importancia mística. A lo largo



de la historia se ha atribuido su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y otras artes.

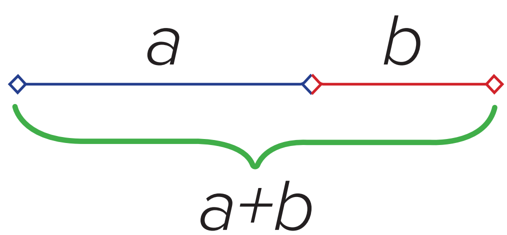
¿Cómo se construye el número áureo? Recordemos que decíamos que es una construcción geométrica que viene de la proporción entre dos segmentos de una recta.

El número áureo es el valor numérico de la proporción que guardan entre sí dos segmentos de recta a y b (a más largo que b), que cumplen la siguiente relación:

- La longitud total, suma de los dos segmentos a y b, es al segmento mayor a lo que este segmento a es al menor b.

Veamos cómo construir este número:

- Escriba la relación que se ha indicado más arriba para dar con el número áureo: la longitud total, suma de los dos segmentos a y b, es al segmento mayor a lo que este segmento a es al menor b.



- Fíjese que queda de la siguiente forma: $\frac{(a+b}{)/a} = \frac{a/}{b}$
- Decíamos que el número áureo es la proporción que guardan entre sí estos dos segmentos a y b. Es decir, el número áureo $\phi = \frac{a}{/b}$
- Recordemos cómo podemos calcular el valor de este número, resolvamos la ecuación: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\phi}$
- Debemos ver que $\frac{b}{/a}$ es la inversa de $\frac{a}{/b}$.
- Tomando la ecuación original: $\frac{(a+b}{)/a} = \frac{a/}{b}$

  y viendo el desarrollo que hemos hecho del primer término y que $\phi = \frac{a}{/b} = \phi$, obtenemos:

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

- Resuelva la ecuación que tiene una sola incógnita (recuerde que debe pasar multiplicando de un lado al otro):

  Veamos la solución: $1+\frac{1}{\phi}=\phi$; $\frac{1}{\phi}=\phi-1$; $1=\phi^2-\phi$; $\phi^2-\phi-1=0$

- Esta ecuación de segundo grado se resuelve usando la fórmula:

$$\phi=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

- Como este debe ser un número positivo que indique la proporción entre estos dos segmentos, la solución es: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
- Calcule el valor de este número: 1,6180339887...

Conozcamos ahora la sucesión de Fibonacci (no se preocupe, en seguida veremos la relación entre estos dos conceptos).

- La sucesión comienza con los números 0 y 1, 2 y a partir de estos, «cada término es la suma de los dos anteriores».

- Calcule los primeros 25 términos de la sucesión de Fibonacci. Para ayudarle vamos a calcular los primeros 5 con usted: 0, 1, 1 (1+0), 2 (1+1), 3 (1+2), a partir de aquí continúe usted (tiene que ir haciendo 2+3, 3+5...).

- A continuación, vaya haciendo la división de cada número de la sucesión por su anterior, empezando por el 1, 1: 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5 ...

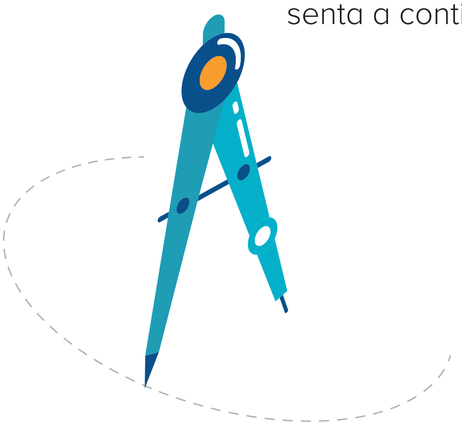
- ¿Qué número aparece cuando hacemos la división del término 20 entre el término 19?, ¿le resulta familiar?

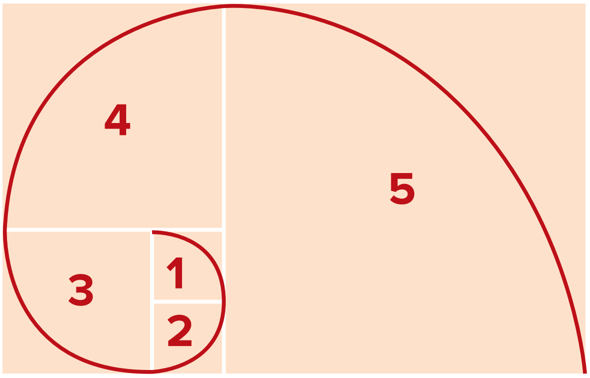
- Aquí aparece el concepto de límite numérico, el número hacia el que se aproxima la división de un término de la sucesión de Fibonacci por su anterior.

Así podemos afirmar, si nombramos los términos de la sucesión de Fibonacci de la forma $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$, $F_8=21$, $F_9=34$, que el límite cuando vamos avanzando de $\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi$, es decir, un término de la sucesión de Fibonacci dividido por el anterior, es casi el número phi cuando tomamos los últimos números de dicha sucesión. Como esta es infinita, esto quiere decir que cuanto más nos acerquemos al infinito, más se parecerá al número phi.

Esto en matemáticas se escribe de la siguiente forma: $\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi$ que, interpretado de una forma sencilla, sería que la división de dos términos consecutivos muy altos de la sucesión de Fibonacci casi es el número phi.

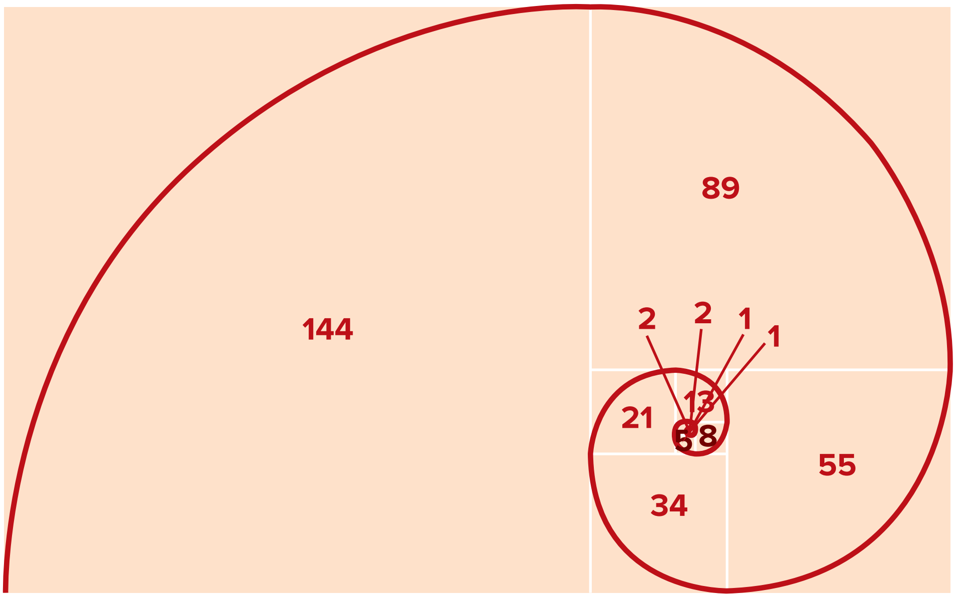
Una manera de construir gráficamente la sucesión es la que se presenta a continuación:



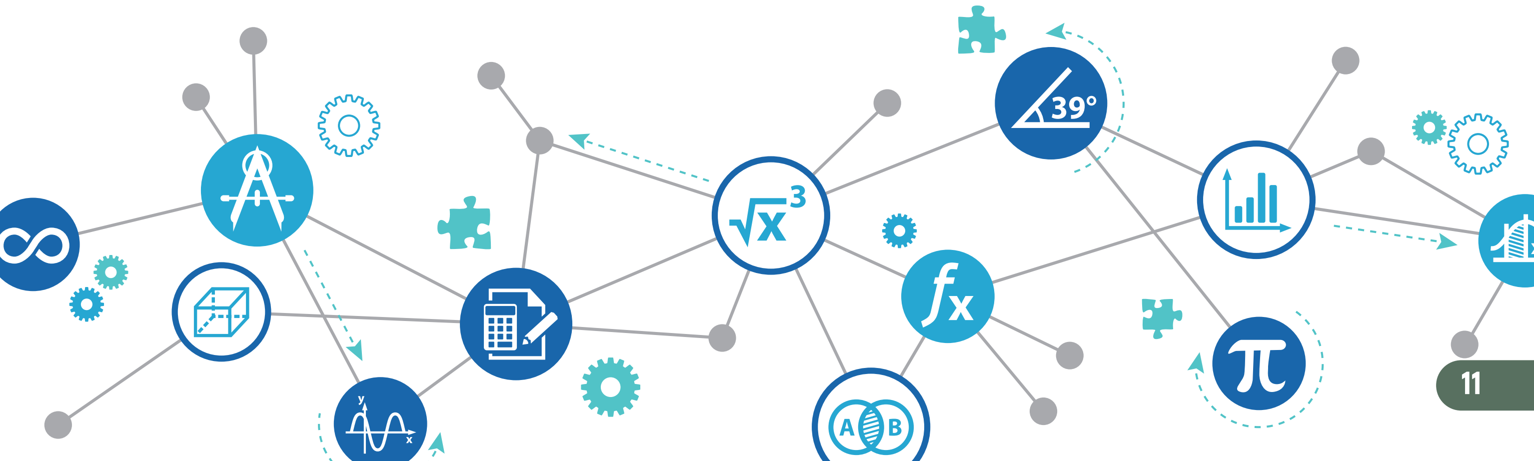


Vemos que ya empieza a aparecer la espiral que veíamos en las primeras imágenes.

- Continúe con la construcción de los siguientes cuadrados:

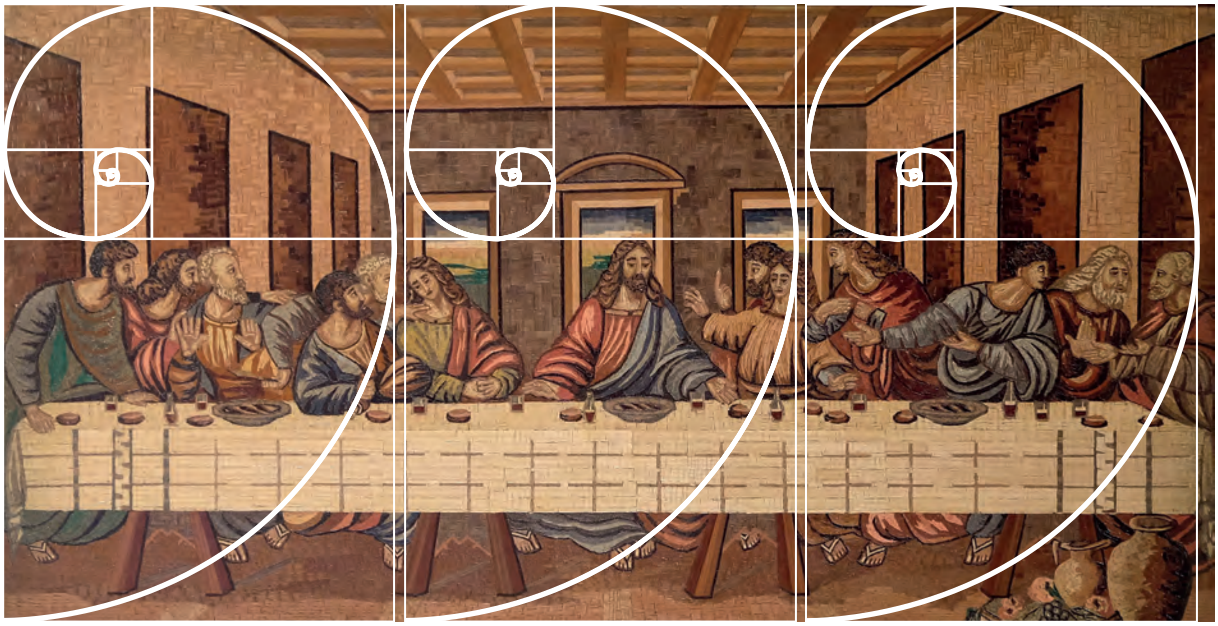


Fuente: Gallofré (2014)



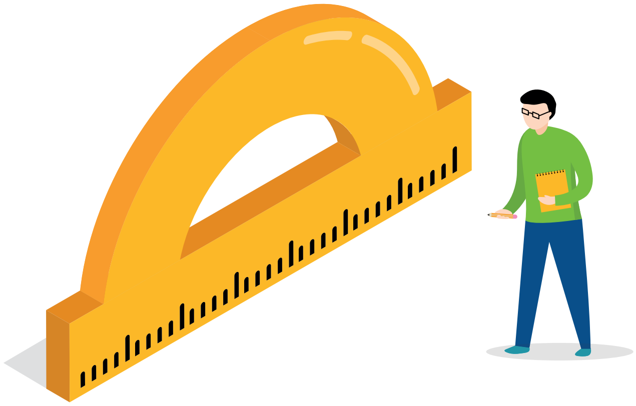
Actividad:

Veamos la presencia del número áureo en algunos cuadros, en la naturaleza y en la arquitectura para entender el porqué de su relación con la belleza y la armonía.



Fuente: Ramírez (2017

Encuentre cómo podemos ver el número áureo en las imágenes del principio de las actividades.



Momento metodológico 2
¿Qué nuevos saberes aprendemos?

Viendo y aprendiendo sobre el número áureo y su relación con la sucesión de Fibonacci, hemos realizado ejercicios que tienen que ver con las variaciones. En esta parte vamos a ver cómo relacionar los cambios medios con los cambios instantáneos.

Pondremos ejemplos que tienen que ver con situaciones físicas:

Sesión 2

La derivada: la importancia de la variación instantánea y su uso

(The derivatives: the importance of the instant variation and its uses)

Actividad:

- ¿Cuál es la diferencia entre velocidad media y velocidad instantánea? Conversen en grupo para comprobar si todos tenemos la misma respuesta.

- Supongamos que un coche tarda 3 horas en recorrer el trayecto entre Bogotá y Tunja (141,3 kilómetros), ¿cuál ha sido su velocidad media?, ¿y si hubiera tardado 2 horas?, ¿y si hubiera tardado 2 horas y media?:

- ¿Es esa la velocidad que marcaba el velocímetro en todo momento? ¿Puede ser que en algún punto se haya alcanzado una velocidad de 100 km por hora?:

- ¿Qué significa la velocidad instantánea?:

Supongamos que hemos ido anotando la distancia recorrida y el tiempo en la siguiente tabla:

Distancia recorrida (en kilómetros)	Tiempo empleado (en minutos)
10	7
20	17
30	22
40	30
50	50
60	56

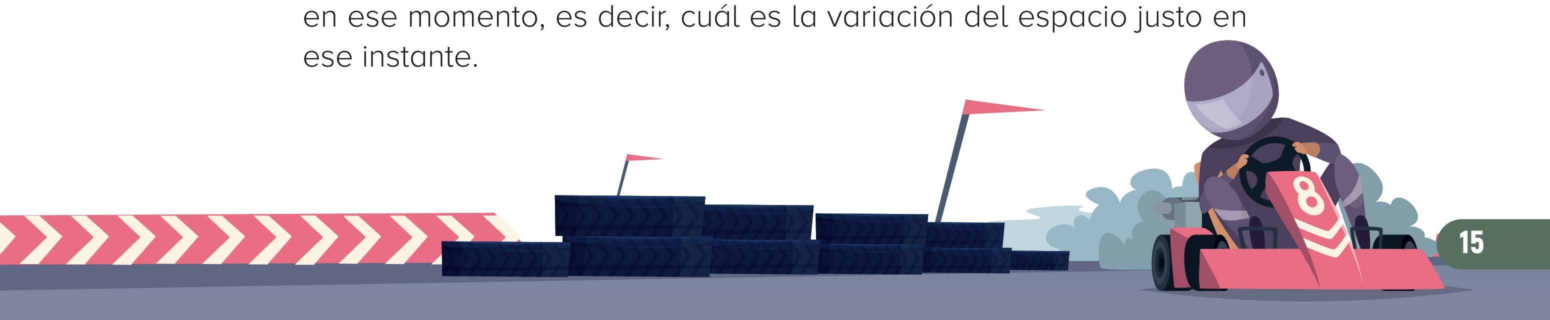
- ¿Qué velocidad media ha tenido este vehículo en estos 60 kilómetros?:
- ¿Qué velocidad media tuvo en los primeros 10 y en los primeros 20 kilómetros?:
- ¿Qué velocidad media tuvo entre los 20 y los 50 kilómetros?:
- Nota: Realice todos los cálculos en kilómetros por hora; recuerde que el tiempo está dado en minutos.

Una manera de aproximar la velocidad instantánea, en caso de que no contemos con cuentakilómetros, sería realizar este mismo ejercicio, anotando los mismos datos en intervalos más cortos.

Distancia recorrida (en kilómetros)	Tiempo empleado (en minutos)
1	0,4
2	1,6
3	2,4
4	3
5	3,7
6	4,4
7	5
8	5,9
9	6,5
10	7

- ¿A cuánto se aproxima la velocidad instantánea en el minuto 3?:
- ¿A cuánto se aproxima la velocidad instantánea en el minuto 5?:
- ¿Y en los minutos 2 y 4? ¿Cuánto cree que sería? ¿Cómo llegó a ese cálculo?:

En matemáticas se conoce como derivada la variación instantánea de lo que estamos estudiando. En este caso la velocidad instantánea en los instantes 2, 3, 4 o 5 sería la derivada de la función espacio recorrido (que es lo que estamos mirando) en cada uno de esos instantes. Para entenderlo, significaría a qué velocidad vamos justo en ese momento, es decir, cuál es la variación del espacio justo en ese instante.



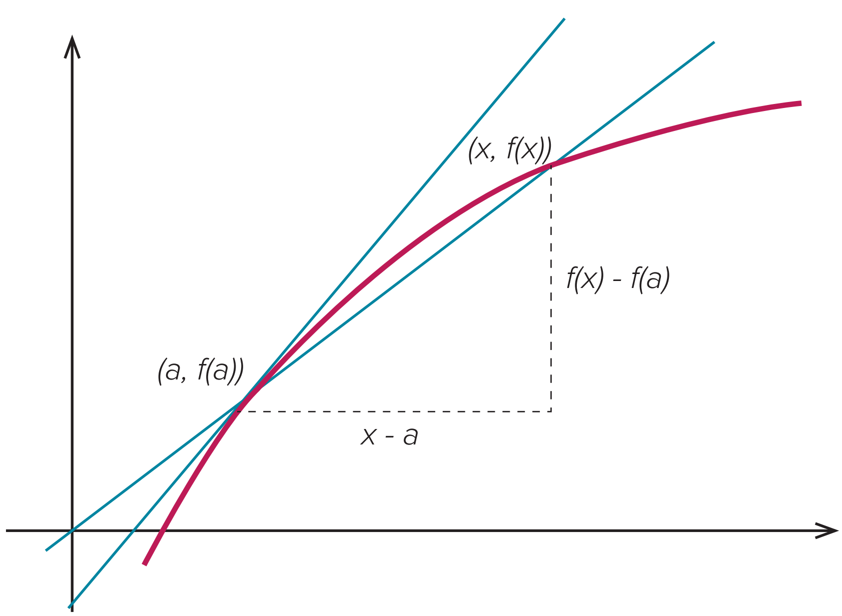
Supongamos una montaña rusa como la que se presenta en el siguiente dibujo:

Mathema. (2013)

- ¿En qué puntos la velocidad de los carros será mayor?, ¿Por qué?.
- ¿En qué puntos la velocidad será menor?, ¿Por qué?.

Vemos que los puntos en donde la velocidad será mayor son aquellos que tienen una mayor inclinación hacia abajo y los que tienen menor velocidad son aquellos en donde esteremos parados (por tanto, sin inclinación). Esto se puede buscar dibujando rectas tangentes a la figura de los rieles de la montaña rusa.

Esto es lo mismo que se hace para buscar derivadas (es decir, cambio instantáneo) en las funciones:



Así, la variación media de la función aquí representada entre los puntos a y x equivale al dibujo de la recta que pasa por los dos puntos y su valor es $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, que equivale a la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos, es decir, a su inclinación.

La variación instantánea (es decir, la derivada) de la función en el punto a será la pendiente de la recta que solo pasa por ese punto (a,f(a)), es decir, la recta tangente que también está representada.

La manera de hacer el cálculo sería haciendo $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, es decir, hacia cuánto tienden los valores de los pendientes (inclinaciones) de las rectas cuanto más nos acercamos a *a*, es decir, cuanto más cerca estamos de tener una recta que solo pase por ese punto (que sea tangente a él).

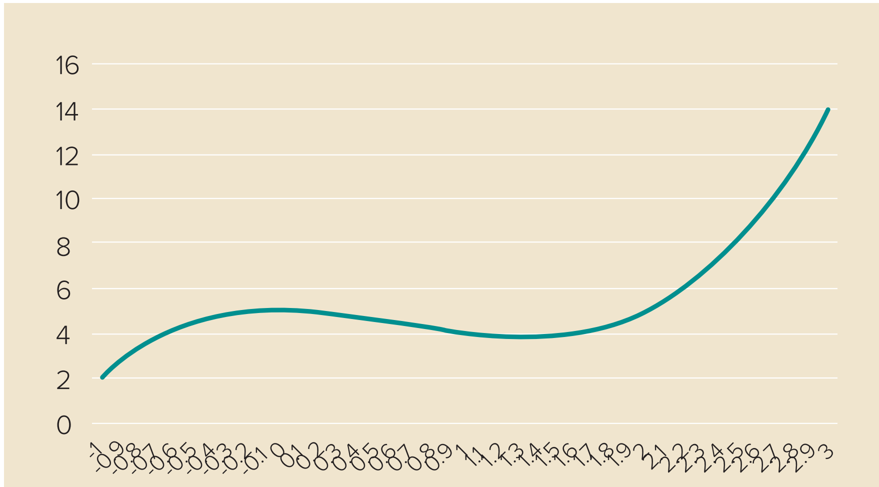
Veámoslo con un ejemplo concreto, supongamos la función $f(x) = x^3 - 2x^2$. Queremos calcular la variación instantánea de esta función (qué tan inclinada está) en el punto x = 2.

Hagamos una tabla de valores de la función y su representación gráfica:

x	f(x)=x^3-2x^2+5
-1	2
-0,9	2,651
-0,8	3,208
-0,7	3,677
-0,6	4,064
-0,5	4,375
-0,4	4,616
-0,3	4,793
-0,2	4,912
-0,1	4,979
0	5
0,1	4,981
0,2	4,928
0,3	4,847
0,4	4,744
0,5	4,625
0,6	4,496
0,7	4,363
0,8	4,232
0,9	4,109
1	4

x	f(x)=x^3-2x^2+5
1,1	3,911
1,2	3,848
1,3	3,817
1,4	3,824
1,5	3,875
1,6	3,976
1,7	4,133
1,8	4,352
1,9	4,639
2	5
2,1	5,441
2,2	5,968
2,3	6,587
2,4	7,304
2,5	8,125
2,6	9,056
2,7	10,103
2,8	11,272
2,9	12,569
3	14

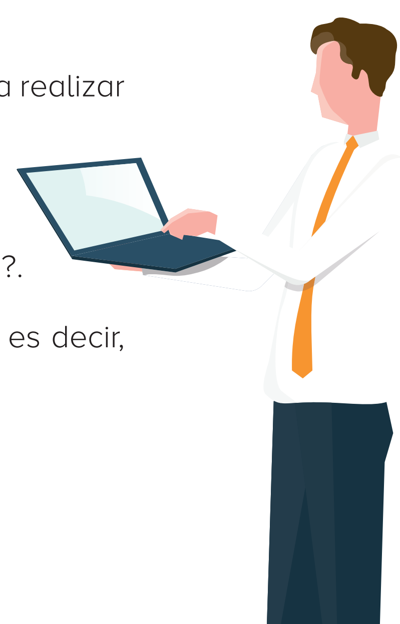
Y el gráfico:



- ¿Le parece que en el punto x = 2 está muy inclinada la función?
- Para hacer una primera aproximación de cuánto debe ser la inclinación justo en ese punto, debemos calcular las inclinaciones medias tomando otros puntos, es decir:
- ¿Cuál es la variación media entre los puntos x = 2 y x = 3? Esto se haría: f(2) = 5 y f(3) = 14, así que la variación media (el crecimiento medio) entre estos dos puntos sería:

$$\frac{f(2) - f(3)}{3 - 2} = \frac{14 - 5}{1} = 9$$

- Ahora, para hacer la variación instantánea en el punto x = 2 deberíamos hacer lo mismo, pero con un punto muy cercano al 2, por ejemplo, el 2,1 (o el 1,9).
- f(2) = 5 y f(2,1) = 5,441, así que la variación instantánea en el 2 será muy parecida a $\frac{5{,}441 - 5}{2{,}1 - 2} = 4{,}41$. El valor real de la variación instantánea en ese punto es 4, pero nos hemos aproximado para acercarnos aún más al valor exacto.
- Calcule el valor de la función en el punto 2,01 y vuelva a realizar el cálculo de la variación media.
- Repita el proceso en el punto 1,99.
- ¿A cuánto se acerca la variación justo en el punto x = 2?.
- Repita los cálculos de estas variaciones instantáneas, es decir, derivadas, para las funciones:



$$f(x) = -2x^3 + 5x;\ f(x) = x^2;\ f(x) = 8x$$

Todas ellas en el mismo punto 2.

Para que los cálculos de las derivadas sean más rápidos y no haya que hacer todas estas tablas, existen las fórmulas de las derivadas de las funciones elementales que nos permiten ganar tiempo. A continuación veremos las derivadas más útiles:

1. $y = \text{cte.} \rightarrow y' = 0$
2. $y = x \rightarrow y' = 1$
3. $y = x^x \rightarrow y' = nx^{x-1}$
4. $y = 2 \rightarrow y' = 2^x. \, Ln\ 2$
5. $y = e^x \rightarrow y' = e^x$
6. $y = \text{sen } x \rightarrow y' = \cos x$
7. $y = \cos x \rightarrow y' = \text{sen } x$
8. $y = \text{tg } x \rightarrow y' = 1 + \text{tg}^2\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9. $y = \log_e x \rightarrow y' = \dfrac{\log_e e}{x}$
10. $y = \ln x \rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

Y también de sus propiedades:

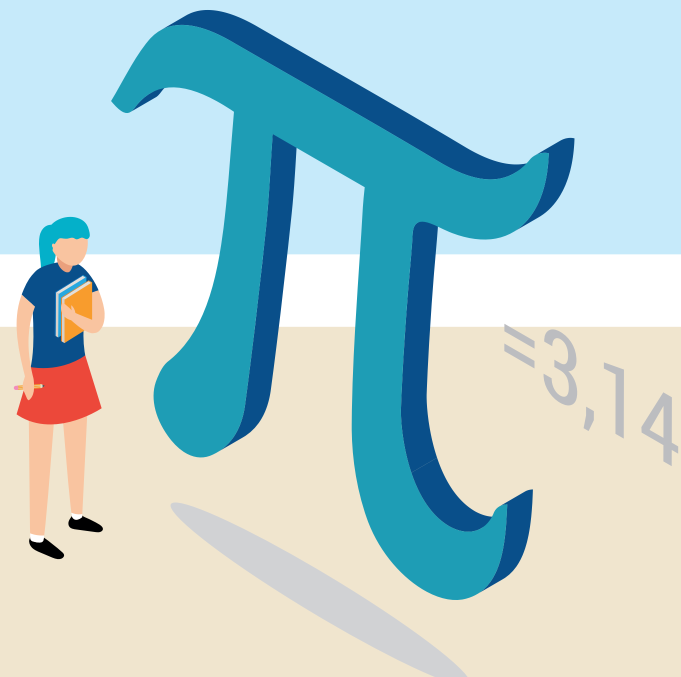
I. $(k \, . \, f)' = k \, . \, f'$

II. $(f + g)' = f' + g'$

III. $(f \, . \, g)' = f' \, . \, g' + f \, . \, g'$

IV. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \, . \, g + f \, . \, g'}{g^2}$

IV - b $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{f'}{f^2}$



Gorostizaga, JC. [Imágenes]. Recuperado de http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/tabl_deriv.htm.

Notas

- el símbolo *y'* significa derivada de la función y (también se podría poner *f'*(*x*) para indicar derivada de la función f.
- *k* significa constante, es decir, un número concreto, no una función.

Sesión 3

Cálculo de derivadas y su uso práctico

(Calculation of derivatives and their practical uses)

Actividad:

- Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 8x - 10$$

$$f(x) = (x^2 - x + 1) \times (x^3 - 7x)$$

$$\mathrm{f(x)} = \frac{6x - 3}{7x + 5}$$

$$\mathrm{f(x)} = \frac{x^3 + 4x - 8}{6x}$$

- Calcule el valor de las derivadas anteriores en el punto x = 1.

Momento metodológico 3
¿Qué hacemos con lo que sabemos?

Introducción:

Vamos a profundizar en el uso de la probabilidad para realizar algunos cálculos interesantes.

Sesión 4

La probabilidad y su uso en situaciones de la vida real

(The probability and its use in real life situations)

Actividad:

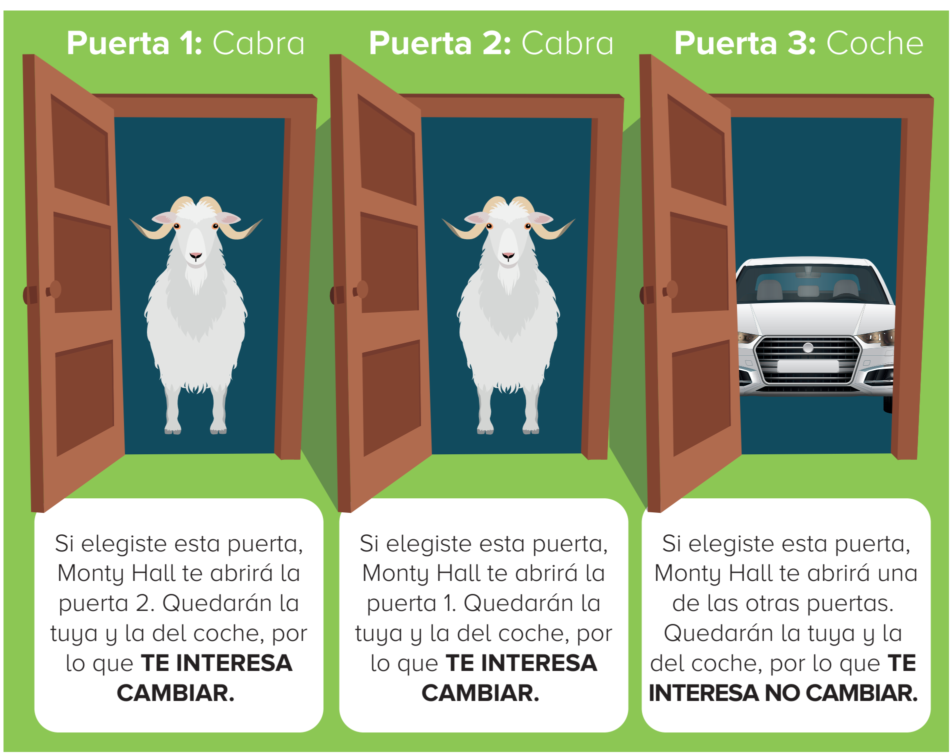
Lea detenidamente estas dos situaciones que se le presentan:

1. El concursante de un programa de televisión se enfrenta a la prueba final en la que hay tres puertas. Detrás de una de ellas hay un coche, y tras las otras dos, una cabra en cada una. Elige una y el presentador ordena abrir alguna de las otras dos, siempre una con cabra. Entonces tienta al concursante: «¿Desea cambiar de puerta?». La intuición nos dice que da igual, que tendremos un 50 % de probabilidades de acertar con el coche. Pero no es así. Si nos quedamos en la misma, solo tendremos una probabilidad de 1/3 (33 %) de conseguirlo, igual que al principio. Pero si cambiamos, la probabilidad de obtener el coche será de 2/3: seremos ganadores siempre que nuestra primera opción no fuera la correcta. Y partíamos con un 66 % de probabilidades de equivocarnos.

2. Nos hacen una prueba para averiguar si padecemos una grave enfermedad que afecta a una de cada 200 personas. El análisis tiene el 98 % de fiabilidad, esto es, falla el 2% de las veces. Damos positivo. ¿Debemos asustarnos? Sí, pero no en exceso. La probabilidad de que padezcamos el mal es del 20%. De cada 10 000 personas, unas 50 tendrán la enfermedad. De ellas, 49 obtendrán un resultado positivo en la prueba y una dará negativo (por el margen de error). En cuanto a la población sana (9950 personas), 9751 darán negativo y 199 positivo. Luego la mayoría de las personas diagnosticadas del mal en ese análisis (199 de 248) serán en realidad falsos positivos (80 %).

- ¿Qué ha entendido de la situación 1?, ¿Cómo puede explicarla?.

- Dibuje un diagrama que le ayude a explicar lo que sucede en ese caso.



Morales, MA (2017). [Imágenes]. Recuperado de https://elpais.com/elpais/2017/10/11/el_aleph/1507735936_181445.html.

Es decir, nos conviene cambiar 2 de las 3 veces, es decir, un 66 % del número de veces, que será la posibilidad de que ganemos.

- En la situación 2, lo normal es que pensemos, cuando nos dan los resultados, que hemos tenido la mala suerte de ser de los pocos que se enferman. Lo que olvidamos son dos cosas: primero, que la prueba no es 100 % segura (aunque cuando leemos 98 % de segura pensemos que no falla casi nunca) y, segundo, que lo más probable es no estar enfermos (puesto que solo 1 de cada 200 personas lo está). Esto quiere decir que lo más probable es estar sanos.

- Hagamos los cálculos de estos números: Supongamos que tomamos una muestra de 10 000 personas; como solo 1 de cada 200 personas está enferma, de estas 10 000, ¿cuántas estarán enfermas?:

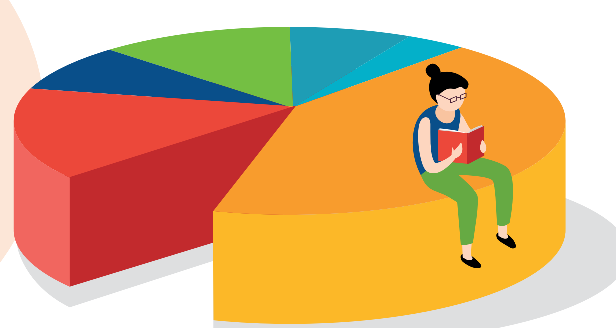
  10 000/200 = 50

Al hacer la prueba, esta acierta (tiene una fiabilidad) del 98 % es decir, que de estas 50 personas enfermas de verdad, la prueba dirá a 49 personas que están enfermas y a una que no lo está (aunque sí lo está de verdad, pero falla algunas veces la prueba).

De las 9950 personas sanas, la prueba dirá al 98 % que lo están, es decir, a 9741 les dirá la verdad, que están sanas, y al resto, 199, les dirá una "mentira" (recordemos que la prueba falla) es decir, les dirá que están enfermas aunque están sanas.

Así pues, tenemos 199 + 49 personas que han sido diagnosticadas como enfermas (esto da un total de 248), de las cuales solo están enfermas realmente 49. Es decir, de los 248 casos diagnosticados como enfermos, solo 49 lo están realmente, y esto da 49/248 = 0,1976, es decir, menos de un 20 % de gente realmente enferma de todos los que han sido informados como enfermos.

¿Qué opina de estos datos?, ¿Conoce datos parecidos en el establecimiento?.



Proceso de autoevaluación

A continuación se presentan una serie de preguntas que a criterio individual permiten identificar avances frente a la unidad; marque con una X la respuesta que prefiera:

Mis avances en la unidad	Nunca (1-1,9)	A veces (2-2,9)	Casi siempre (3-3,9)	Siempre (4,0-5,0)
¿Qué imágenes puede indicar que cumplan con la proporción áurea?				
¿Es capaz de construir una sucesión con el número de pasos que necesita dar para llegar hasta el comedor durante una semana?				
¿Puede calcular la variación media e instantánea de una función en un punto?				
¿Comprende los conceptos de probabilidad básica?				

Evaluación para formación de agentes educativos

A continuación se presentan las competencias y desempeños trabajados en esta unidad. Igualmente, se proponen criterios de evaluación y evidencias que deben ser valorados para establecer los aprendizajes alcanzados.

Área	Competencia	Desempeño	Actividad	Evidencia
Matemáticas	Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva, y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	Comprende la importancia de la derivada como razón del cambio instantáneo y como límite del cambio medio.	Sesiones 2 y 3	Ejercicios de cálculos de variaciones medias e instantáneas de las actividades en las sesiones 2 y 3.
	Justifica resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.	Es capaz de realizar tablas que le ayuden a calcular la variación media e instantánea.	Sesión 1	Construcción de las sucesiones y cálculo de límites mediante aproximaciones de la sesión 1.
	Interpreta conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos. Propone inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.	Comprende la diferencia entre sucesos dependientes e independientes. Toma decisiones a partir de los resultados obtenidos en cálculos estadísticos.	Sesión 4	Comprensión y aplicación de la probabilidad en contextos reales de la sesión 4.

Planeación del (la) monitor(a)
Unidad Didáctica Integrada
Matemáticas

Materiales:

Cartilla del estudiante, pliegos de papel periódico, hojas blancas, algunos textos de apoyo, esferos, colores, marcadores.

Recomendaciones:

- Se sugiere que el monitor lea las actividades y las apropie antes de desarrollarlas en el aula.
- Mantener siempre en las sesiones el portafolio del estudiante y recordar de manera constante la importancia de guardar allí el material trabajado.
- Es necesario que se revise el material con el que se va a trabajar para tener listos, con anticipación, algunos elementos necesarios en el desarrollo de las sesiones.
- Es necesario que el monitor revise bibliografía que pueda complementar las actividades propuestas.

Momento metodológico 1
¿Qué sabemos?

Tiempo: 8 horas

Sesión 1. La belleza en la vida real explicada con matemáticas.

Para el primer momento metodológico, el monitor explica: Vamos a realizar cálculos sencillos de valores de sucesiones numéricas y así entender el uso que tienen varias de ellas en situaciones reales.

A continuación haremos ejercicios con la proporción áurea como base para responder a situaciones de la cotidianidad.

Sesión 1. La belleza en la vida real explicada con matemáticas.

Materiales específicos para la sesión:

Cartilla del estudiante, cartilla del monitor, hojas de papel, colores, lápices, marcadores y calculadora.

Muchas veces hay definiciones de situaciones reales que nos cuesta escribir con fórmulas matemáticas. El ejemplo sería el de cómo se calcula el número áureo phi: El número áureo es el valor numérico de la proporción que guardan entre sí dos segmentos de recta a y b (a más largo que b), que cumplen la siguiente relación:

La longitud total, suma de los dos segmentos a y b, es al segmento mayor a lo que este segmento a es al menor b.

se vio por $\frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b}$

Es importante que los estudiantes puedan escribir relaciones numéricas de forma sencilla y para eso es conveniente hacer varios ejercicios de este tipo:

- Un número es tres veces otro número más 10.
- Dos números cumplen la siguiente relación: la mitad del menor al cubo es el mayor menos 8.

Piense en situaciones que se pueden expresar usando ejemplos prácticos:

La distancia del aula a la sección es el triple que la que hay de la sección al comedor.

Varios más.

A continuación se les dan a los estudiantes varias sucesiones y se les pide que intenten encontrar la fórmula que las representa.

Ejemplo: 1, 2, 4, 8, 16, 32... ¿Qué número viene a continuación?

Si escribimos la sucesión, quedaría como $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$, $a_5 = 32$.

Como cada vez estamos multiplicando por 2 el número anterior, esto queda como potencias del número 2, es decir, $a_n=2^n$. Compruébelo con la sucesión anterior.

Pensar en más situaciones de este tipo.

Calcule los primeros 10 términos de las siguientes sucesiones:

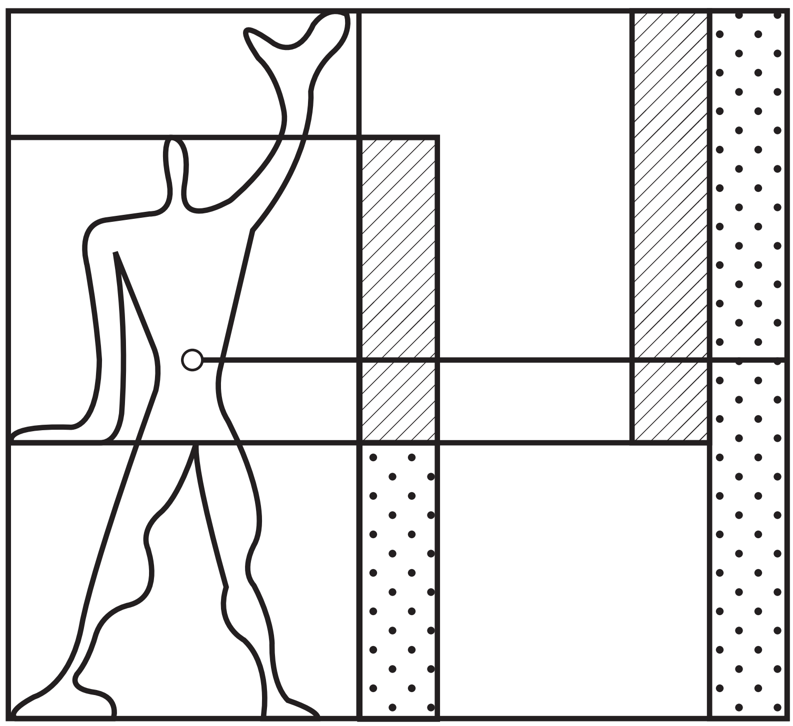
$A_n = 3^n - 2^n$

$B_n = 2^n/3^n$

Calcule el valor de A_{100} y de B_{100}. ¿Cuál cree que es su límite en cada uno de los dos casos?.

Finalmente, tome mediciones de los estudiantes (las toman ellos). Se dice que un cuerpo tiene una proporción áurea si tomamos el ombligo como el punto que divide el cuerpo en dos y la proporción entre la parte mayor respecto a la menor es el número que es phi.

Comprueben quién se acerca más a la perfección proporcional.



Momento metodológico 2
¿Qué saberes aprendimos?

Tiempo: 18 horas

Sesión 2. La derivada: la importancia de la variación instantánea y su uso.

Sesión 3. Cálculo de derivadas y su uso práctico.

Para este momento metodológico el monitor explica: Vamos a estudiar los cambios en las magnitudes, las variaciones de estas y cómo estos cambios se usan e interpretan para dar respuesta a valores importantes en el cálculo de valores fundamentales en varias áreas con aplicación en la vida real: velocidad, temperatura, flujos económicos, de población, entre otros.

Materiales:

Hojas de papel, lápices, marcadores, pliegos de papel, calculadora.

Sesión 2. La derivada: la importancia de la variación instantánea y su uso.

Materiales específicos para la sesión:

Cartilla del estudiante, cartilla del monitor, hojas de papel, colores, lápices, marcadores y calculadora.

Se recomienda al monitor tener una variedad de situaciones que ejemplifiquen el tema de magnitudes con el objetivo de fortalecer en los estudiantes la comprensión sobre el tema y profundizar en él.

Al hablar de magnitudes se pueden usar, por ejemplo, la velocidad, la temperatura, las precipitaciones, el dinero, entre otros. Estas situaciones son cercanas y comunes.

En los ejemplos se deben trabajar los valores medios de esas magnitudes, por esto se tiene que recordar cómo se hacen los cálculos. Si se toma la velocidad como ejemplo, se debe recordar que esta es una magnitud física y que su fórmula es espacio/tiempo. Por lo tanto, la velocidad media es el espacio total recorrido dividido por el tiempo que se tarda en recorrer.

Se recomienda que se hagan varios ejercicios para profundizar el concepto.

A continuación se sugieren algunos ejemplos:

- Cuántos kilómetros (km) hay desde una determinada ciudad a otra y cuál es el tiempo que se tarda un vehículo en hacer el recorrido. Al realizar la división se obtiene el valor de la velocidad media a la que ha ido un vehículo en ese trayecto.

  Posteriormente se pregunta a los estudiantes si creen que el vehículo en cuestión ha ido a la misma velocidad todo el trayecto; la respuesta esperada es no porque según la lógica un vehículo varía su velocidad en el trayecto. Esto permite introducir el concepto de velocidad instantánea, que es la velocidad que lleva el auto en cada momento, es decir la que marca el velocímetro.

Para comprender bien la diferencia entre valor medio y valor instantáneo es importante utilizar otras magnitudes, que cuanto más cercanas sean a la vida real, más fácil y significativa será su comprensión y su aprendizaje.

- Las precipitaciones: Una cosa es calcular la cantidad promedio de agua caída por hora en Medellín durante un día y otra es la cantidad de agua que, en una hora en concreto, cae en Medellín; la primera sería la precipitación media y la segunda la precipitación instantánea.
- En la vida real las dos magnitudes son de suma importancia y tienen interpretaciones diferentes, la velocidad media nos dará una idea de qué tan congestionado está el tráfico, mientras que la velocidad instantánea nos dirá si hemos pasado el límite de velocidad permitido.
- Con la lluvia, la precipitación promedio nos indicará si la zona de la cual se habla es un lugar con problemas de reservas de agua o si, por el contrario, es un área que sufre de sequía; mientras que la precipitación instantánea permitirá valorar los riesgos de inundaciones de la misma zona.

Se recomienda:

- Hacer 4 horas de cálculos de valores medios con magnitudes. Que los estudiantes propongan ejemplos y ejercicios a partir del espacio que habitan, sus realidades e intereses; por ejemplo, cuánto arroz se gasta por día en la cocina de la cárcel.
- Realizar una actividad de 2 horas donde se trabaje el tema de la relación entre concepto de valor medio y valor instantáneo como lo indica el manual.

Sesión 3. Cálculo de derivadas y su uso práctico.

Materiales específicos para la sesión:

Cartilla del estudiante, portafolio, hojas blancas, lápices o esferos, calculadora.

La primera parte consistirá en realizar derivadas de funciones usando las tablas de derivadas de funciones elementales y la de propiedades de las derivadas. Es conveniente hacer entender que esto permitirá desarrollar agilidad para lo que viene a continuación, que es una aplicación práctica de la derivada.

A continuación se recomienda al monitor pensar en funciones que puedan representar diferentes situaciones reales y, a partir de ellas, formular preguntas que se deban resolver con el cálculo de derivadas.

Ejemplo:

Supongamos que la función que indica el espacio recorrido por un vehículo que sale de Cali tiene la siguiente fórmula:

$e(x) = 0{,}001x^3 + 0{,}02x^2 + 5$, donde e(x) indica el espacio recorrido, en metros, y x es el tiempo en segundos (con x a partir de cero, es decir, $x \geq 0$).

A partir de aquí se pueden plantear las siguientes preguntas:

- Calcule el espacio recorrido en el intervalo que va del segundo 10 al segundo 20. ¿Qué velocidad media llevaba el vehículo?.
- Inventar más intervalos para calcular la velocidad media.
- Calcule, haciendo el procedimiento aprendido de aproximaciones y de límite de los valores, el valor de la velocidad instantánea en el segundo 10 (recuerde, para eso calculamos el valor medio de la velocidad entre los segundos 10 y 10,1 y a continuación entre los segundos 10 y 10,001).
- Derive la función e(x) (es decir, calcule e'(x)).
- Calcule e'(10) (es decir, calcule la derivada de e(x) en el punto 10).
- ¿Qué relación hay entre los dos valores calculados como velocidad instantánea en el instante 10 segundos?.
- De acá se deduce que la manera rápida de calcular valores instantáneos es derivar la función y sustituir en el valor que deseamos calcular.
- Realizar este mismo procedimiento con muchos más ejemplos.

Propuesta:

- Hacer dos actividades, de 2 horas cada una, sobre cálculos de valores instantáneos (es decir de cálculo de derivadas) y dos actividades más, de 2 horas cada una, sobre cálculo de derivadas de funciones con sentido práctico, así como de solución de ejercicios que se respondan usando la variación media y la variación instantánea. Todo lo anterior con el propósito de comprender el concepto, a través de la repetición con los diversos ejercicios, y obtener agilidad en el cálculo de este.

Estas actividades complementarían la sesión, y el tiempo de estas está incluido en la totalidad del desarrollo de la sesión en general.

Para terminar, se recomienda buscar ejemplos en temas diversos como la salud: Se puede hablar sobre presión arterial, niveles de glicemia, entre otros.

Materiales específicos para la sesión:

Cartilla del estudiante, portafolio, hojas blancas, lápices o esferos y calculadora.

Momento metodológico 3
¿Qué hacemos con lo que sabemos?

Tiempo: 8 horas

Sesión 4. La probabilidad y su uso en situaciones de la vida real.

En este momento metodológico se profundiza brevemente en la probabilidad y en su utilidad para la toma de decisiones.

Materiales:

Hojas de papel, lápices, calculadora, marcadores.

Sesión 4. La probabilidad y su uso en situaciones de la vida real.

Materiales específicos para la sesión:

Cartilla del estudiante, portafolio, hojas blancas, lápices o esferos y calculadora.

Se propone que en esta parte realicen varios ejercicios de probabilidad básica y recuerden el uso de los porcentajes (tantos por ciento) para obtener el valor de cuán probable es un suceso.

Se recomienda usar inicialmente situaciones sencillas:

¿Cuál es la probabilidad de que salga cara al tirar una moneda?.

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga 5?.

Con el mismo dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número impar?, ¿y un múltiplo de 3?.

Recuerde que la probabilidad es la división de los casos favorables (aquello que queremos que suceda) entre los casos posibles (el total de cosas que pueden suceder).

Busque ejemplos de estadística en noticias escritas:

De los 80 penales pateados por Messi, ha convertido 73. ¿Qué porcentaje de acierto tiene? Si patea el siguiente, ¿qué probabilidad a priori *tiene de acertar?.*

Busquen más ejemplos como este.

Referencias

López, L. (2017). *El número áureo*. Recuperado de http://elrincondelucaslopez.blogspot.com/2017/10/el-numero-aureo.html.

Gallofré, F. (2014) *Fibonacci: ¿qué son los retrocesos? ¿cómo se opera?* Recuperado de https://www.bolsaytrading.com/2014/07/fibonacci-que-son-los-retrocesos-como-se-opera.html.

Ramírez, M (2017). *Proporción áurea*. Recuperado de https://www.creativosonline.org/blog/proporcion-aurea.html.

Mathema. (2013). *Distancia, velocidad y aceleración*. Recuperado de http://matecolima.blogspot.com/2013/04/distancia-velocidad-y-aceleracion.html.

Gorostizaga, J. C. (s. f.). *Tablas derivadas. Funciones elementales*. Recuperado de http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/tabl_deriv.htm.

IMPRENTA NACIONAL DE COLOMBIA

DISEÑO, DIAGRAMACIÓN
E IMPRESIÓN
www.imprenta.gov.co
PBX: (0571) 457 80 00
Carrera 66 No. 24-09
Bogotá, D. C., Colombia

INPEC
Instituto Nacional Penitenciario y Carcelario

Dirección General: Calle 26 No. 27-48
PBX (57+1) 2347474 - Bogotá, Colombia
www.inpec.gov.co